

## Capital público y crecimiento económico: un modelo alternativo\*

**Blanca Sánchez-Robles**

*Departamento de Economía  
Universidad de Cantabria  
Avda. Los Castros, s.n., 39005 Santander  
Tel.: 942 20 16 31. Fax: 942 20 16 03*

### RESUMEN

Este artículo presenta un nuevo modelo de crecimiento endógeno, en el cual el motor de la economía es la linealidad presente en la función de producción, homogénea de grado uno en los stocks de capital privado y público. Específicamente -y como una alternativa a los modelos tradicionales que emplean funciones de producción Cobb-Douglas- la tecnología que se asume en este trabajo es del tipo CES.

El empleo de la técnica de eliminación de tiempos ayuda a caracterizar la dinámica de la transición de la economía hasta el estado estacionario. La tasa de crecimiento del consumo es monótonicamente decreciente en el tiempo a lo largo de la transición, y esta transición es más rápida, como ocurre en el modelo de Ramsey, si la elasticidad de sustitución entre ambos inputs es más pequeña. No obstante, y a diferencia del

\* La autora desea agradecer los valiosos comentarios, sobre versiones anteriores de este trabajo, de Antonio Argandoña, Pablo Coto-Millán, Sergio Rebelo, Paul Romer y José Villaverde. Asimismo agradecen la ayuda prestada por los prof. Antonio Peláez y Carlos Fernández con respecto al uso de los programas informáticos para resolver ecuaciones diferenciales.

modelo neoclásico, el modelo predice una tasa de crecimiento en el estado estacionario mayor que cero, debido al hecho de que la productividad de los dos tipos de capital, considerados conjuntamente, es no decreciente.

## ABSTRACT

This paper designs a new model of endogenous growth, in which the driving force of economic growth is the linearity that arises in the production function, which is homogeneous of degree one in both the private and public capital. More specifically - and as an alternative to traditional models employing some sort of Cobb-Douglas technology- the technology assumed here is of the CES type.

The transitional dynamics of the economy towards the steady state are characterized by means of the time-eliminating technique. The rate of growth of consumption is monotonically decreasing in time during the transition to the steady state, and this transition is faster, as in the Ramsey model, if the elasticity of substitution between the two inputs is smaller. However, the model predicts a non-zero rate of growth in the steady state because of the non-decreasing productivity of output in both types of capital.

*Palabras clave:* crecimiento endógeno, capital público, eliminación de tiempos.

## 1. INTRODUCCIÓN

La investigación en el área del crecimiento económico –poco menos que estancada en los años 60 y 70 por la frustración de los propios economistas, cuyos modelos sólo eran capaces de generar crecimiento en el estado estacionario si éste se asumía a priori (Solow, 1956, Shell, 1966) o si se especificaban valores irreales de los parámetros (Nordhaus, 1969)– revivió gracias a destacadas contribuciones de la segunda mitad de la década de 1980 y principios de la siguiente. El detonante, como es bien sabido, fue el artículo de Paul Romer (1986), que mostraba que los rendimientos crecientes en la función de producción –procedentes de las externalidades del conocimiento– podían generar crecimiento endógeno. Lucas (1988), de modo coherente con su tradición más liberal, prefirió atribuir el crecimiento a un input rival y excluible, el capital humano. En cualquier caso, su modelo presentaba asimismo rendimientos crecientes, nuevamente debido a una externalidad (en este caso, del capital humano). Rebelo (1991) demostró, sin embargo, que esta externalidad no es necesaria para generar crecimiento

endógeno, que puede aflorar también en un modelo tan simple como el lineal, donde la función de producción presenta rendimientos constantes a escala en un concepto amplio de capital (modelo «AK»). A partir de aquí, las contribuciones se hicieron cada vez más frecuentes, a la vez que procuraron refinar distintos aspectos de los modelos, mediante, por ejemplo, el recurso al capital público (Barro, 1990, Barro y Sala i Martín, 1992), las mejoras en la calidad de los productos (Grossman y Helpman, 1991, Aghion y Howitt, 1992) o a distintas relaciones de complementariedad y sustitución entre los bienes en diferentes fases de la evolución de la economía (Young, 1993).

La literatura empírica, por su parte, ha sido asimismo extremadamente abundante. Se han sucedido las regresiones «cross country», que siguen a la aportación seminal de Barro (1991) y aprovechan la base de datos de Summers y Heston (1991). Aunque este tipo de estudios presentan, sin duda, algunas deficiencias en cuanto a la utilización de técnicas econométricas (cf. Levine y Renelt, 1992), debe decirse en justicia que han ayudado a los economistas a detectar aquellos factores que ayudan al crecimiento: ausencia de distorsiones en los mercados (Easterly, 1993), capital humano (Barro y Lee, 1993), infraestructura (Easterly y Rebelo, 1993), comercio internacional (Edwards, 1992, 1993), estabilidad macroeconómica (Fischer, 1993), etc. Son más escasos, no obstante, los estudios referentes a un solo país, mediante el análisis de series temporales. La razón de esta carencia puede encontrarse en la dificultad de encontrar series suficientemente largas o en la propia complejidad econométrica añadida que implica el tratamiento de series de datos.

El presente trabajo pretende continuar profundizando en la conexión entre capital público y crecimiento económico. Ciertamente, el efecto de la política fiscal y el gobierno en el crecimiento económico puede ser calificado de ambivalente. El gobierno puede ejercer una acción beneficiosa regulando las externalidades, proporcionando bienes públicos, defendiendo los derechos de propiedad o contribuyendo a que la fuerza de trabajo sea más productiva, mediante inversiones en el ámbito de la educación y sanidad.

Por otra parte, el sector público puede asimismo emplear los fondos de modo ineficiente o introducir excesivas distorsiones mediante los impuestos, por ejemplo. De hecho, hay estudios que sostienen que una presión impositiva mayor reduce el crecimiento (Easterly y Rebelo, 1993). Como destaca Raymond (1989), además, si se acepta que el sector público emplea los recursos de una forma menos eficiente que el sector privado, se concluye que un sector público de excesivo tamaño puede ser nocivo para el crecimiento económico, al tiempo que genera un ambiente propicio a actividades de búsqueda de rentas (cf. Murphy, Shleifer, Vishny, 1991).

En cambio, el capital público puede tener, al menos desde el punto de vista teórico, un impacto positivo sobre el crecimiento económico, en buena medida porque hace al

resto de los inputs más productivos. Por su parte, el mayor consumo público en principio no debería afectar a la tasa de crecimiento, pero sí puede existir algún impacto negativo si contribuye a la generación de déficit público.

Finalmente, la incidencia negativa del déficit público sobre el crecimiento es fácilmente defendible desde el punto de vista teórico, ya que un déficit mayor conlleva un peligro inflacionario (Sargent y Wallace, 1981) o bien obliga a elevar los tipos de interés con el fin de colocar la deuda pública, con el consiguiente efecto «crowding out» sobre la inversión privada. Además, un déficit público de mayor cuantía puede ser indicativo de que un gobierno ha perdido el control de la situación macroeconómica.

La aportación clásica en el ámbito de los modelos que relacionan capital público<sup>1</sup> y crecimiento se debe a Barro (1990). El modelo que presenta es endógeno –lo cual permite que el crecimiento en el estado estacionario puede ser mayor que cero– puesto que la función de producción empleada es homogénea de grado uno en ambos inputs, capital público y privado; esta linealidad presente en la tecnología, además, hace que el modelo pueda englobarse dentro de la clase de modelos «AK». Barro y Sala i Martín (1992), por su parte, tratan explícitamente el problema de la congestión en la utilización de los servicios públicos.

Otros trabajos recientes sobre la conexión entre capital público y crecimiento se deben a Clarida (1993) –que analiza en el contexto de un modelo neoclásico el impacto de los flujos internacionales de capital– y a Futagami y Mino (1995), donde la existencia de rendimientos crecientes y externalidades dan lugar a equilibrios múltiples: la economía se situará en uno u otro en función de las expectativas de los agentes. Glomm y Ravikumar (1994) analizan el papel de los impuestos y el gasto público en un modelo de generaciones solapadas, con resultados similares a Barro (1990). Cashin (1995) diseña un modelo en el que la inversión pública y las transferencias tienen un impacto positivo en la tasa de crecimiento, mientras que los impuestos distorsionantes ejercen un efecto negativo. Aporta, además, evidencia empírica que corrobora las predicciones de su modelo teórico.

En el presente trabajo se analiza sólo la intervención del gobierno en cuanto proveedor de capital público. Más aún, si el capital público se clasifica en productivo, como infraestructura, y social (sanidad y educación) (cf Mas et al, 1993, p. 174), este artículo se referirá a la primera de las dos categorías.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> A partir de aquí se emplearán indistintamente los términos capital público y gasto público. Aunque, obviamente, corresponden a conceptos distintos, en este contexto gasto público se interpreta como inversión pública productiva, destinada a aumentar el stock de capital público, por lo cual puede asumirse que es proporcional al capital público y de este modo emplear ambos términos como sinónimos, en un sentido amplio.

<sup>2</sup> El Banco Mundial (1994), a su vez define la infraestructura como servicios públicos (energía, telecomunicaciones), obras públicas (carreteras y canales) y otras provisiones de servicios de transporte (puertos, aeropuertos, vías férreas, etc.) La definición de Gramlich (1994) es semejante a ésta.

El modelo presentado aquí toma como punto de partida el diseñado por Barro (1990). El modelo de Barro, aunque sin duda esclarecedor, no presenta dinámica de la transición porque se trata de un modelo del tipo «AK». Puede ser interesante, sin embargo, diseñar un nuevo modelo en el cual la economía no se halle en todo momento en el estado estacionario, de modo que pueda analizarse alguno de los rasgos de la transición hasta el mismo. El diseño de este modelo alternativo y el estudio de la dinámica de la transición es el primer objetivo del presente trabajo. El segundo objetivo pretendido es ilustrar –en el contexto de un modelo endógeno de un sector, con dos tipos de capital– la utilización de una técnica recientemente diseñada para analizar la dinámica de la transición, la eliminación de tiempos (Mulligan y Sala i Martín, 1991).

La Sección 2 presenta el modelo teórico y la expresión de las soluciones en el estado estacionario, tanto para el caso del planificador social como para el equilibrio competitivo. La Sección 3 comenta algunas características de la dinámica de la transición, y en particular describe la puesta en práctica del método de la eliminación de tiempos con el fin de analizar la evolución del modelo hasta el estado estacionario. Finalmente, la Sección 4 comenta los resultados obtenidos en las simulaciones y la Sección 5 concluye.

## 2. PRESENTACIÓN DEL MODELO Y SOLUCIÓN PARA EL ESTADO ESTACIONARIO

### a) SUPUESTOS.

#### a.1) *Preferencias.*

La economía está compuesta por agentes de vida infinita, como es habitual en este tipo de modelos. Los agentes de la economía aspiran a maximizar su función de utilidad intertemporal, descontada en el momento cero, dada por la expresión (1)

$$U(0) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) L_t dt \quad [1]$$

Donde  $U(0)$  representa utilidad de la familia,  $\rho$  es el tipo de descuento,  $L_t$  y  $c_t$  el tamaño de la familia y el consumo per capita por unidad de tiempo. En particular, la función de utilidad presenta la forma de aversión relativa al riesgo constante, donde  $\sigma$ , el coeficiente de aversión relativa al riesgo –cuya expresión viene dada por la ecuación (3)<sup>3</sup>– también representa la inversa de la elasticidad intertemporal de sustitución<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> Véase Barro y Sala i Martín, 1995, p. 64.

<sup>4</sup> Para que la utilidad esté acotada es suficiente asumir  $\rho > 0$ ,  $\sigma > 1$ , lo cual concuerda con los valores que generalmente se asumen a la hora de parametrizar las ecuaciones.

Para ver que esta condición es suficiente para que la utilidad esté acotada, puede razonarse del

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad [2]$$

$$\sigma = \frac{-u''(c)c}{u'(c)} \quad [3]$$

No hay progreso técnico ni crecimiento de la población por simplicidad, y por consiguiente los análisis en magnitudes agregadas y per capita coinciden. La población en el momento inicial se normaliza a 1.

#### a.2) Tecnología.

La función de producción está inspirada en la función de producción CES (Arrow et al, 1961):

$$Y = A \{ (bK)^\Psi + [(1-b)G]^\Psi \}^{1/\Psi} \quad [4]$$

$$0 < \Psi < 1$$

El trabajo no aparece como input en la función de producción por simplicidad (de modo similar a como ocurre en Barro, 1990).  $K$  representa capital privado y  $G$  se interpreta en este contexto como el stock de capital público. Puede pensarse en  $G$  en este caso como en un bien rival, de provisión pública, y sujeto a congestión y a excluibilidad incompleta; cada empresa obtiene una parte del stock total de capital público pero no tiene en cuenta su contribución marginal al incremento de la congestión.  $A$ ,  $b$  y  $\Psi$  son parámetros tecnológicos. La elasticidad de sustitución entre los inputs viene dada por la expresión  $1/(1-\Psi)$ .

La función de producción es homogénea de grado uno en  $K$  y  $G$ , y la productividad marginal de cada factor de producción es decreciente, lo cual ya indica que el modelo va a presentar algún tipo de dinámica de transición hacia el estado estacionario. La principal diferencia de esta función de producción con las funciones de producción tradicionalmente empleadas en los modelos neoclásicos –alguna variante de la función Cobb-Douglas– es la violación de una de las condiciones de Inada (Inada, 1964):

---

modo siguiente: si el consumo crece a la tasa  $\gamma$ , el consumo en el momento  $t$  será  $c_t = c_0 e^{\gamma t}$ . Esto implica que dentro de la integral de la expresión (1) aparecerá la expresión  $e^{-[\rho-\gamma(1-\sigma)]t}$ . Para que esa expresión tienda a cero cuando  $t$  tiende a infinito, la condición que se precisa es  $\rho > \gamma(1-\sigma)$ , lo cual se verifica siempre que  $\rho > 0$ ,  $\sigma > 1$ .

asintóticamente la productividad marginal de ambos tipos de capital no tiende a cero, como en la tecnología Cobb-Douglas, sino a una constante. En otras palabras, la productividad marginal de los factores está acotada desde abajo. Este aspecto es crucial para la existencia de crecimiento endógeno.

a.3) *Dinámica de los stocks de capital privado y público.*

Las leyes de acumulación de los stocks de capital vienen dadas por las ecuaciones 5 y 6:

$$\dot{K} = (Q - \tau) Y - c - \delta K \quad [5]$$

$$\dot{G} = \tau Y - \delta G \quad [6]$$

donde un punto sobre una variable representa su derivada con respecto al tiempo,  $\delta$  es la tasa de depreciación de ambos tipos de capital y  $\tau$  es el tipo impositivo. El capital público se financia por medio de impuestos. Intuitivamente, los recursos que pueden dedicarse a la inversión privada neta proceden del output que queda después de descontar los impuestos, una vez que se han cubierto el consumo y la depreciación del capital. Se impone expresamente la condición de equilibrio presupuestario, lo cual parece razonable en un contexto de largo plazo. Futuras extensiones de este trabajo pueden considerar las consecuencias de relajar este supuesto y aceptar, por ejemplo, la financiación del capital público con deuda externa (lo cual concuerda con la realidad histórica reciente en algunas zonas del planeta).

b) SOLUCIONES DEL MODELO

En una primera aproximación, cabe distinguir dos tipos de solución en este modelo, la del planificador social y el equilibrio competitivo. Comenzaremos por la solución del planificador social.

b.1) *Solución del planificador social.*

El planificador social debe elegir la trayectoria óptima de consumo de tal modo que se maximice la utilidad de los agentes (1), verificándose las restricciones (5) y (6). Asimismo, puede elegir la tasa impositiva óptima. Por consiguiente en este caso  $c$  y  $\tau$  son variables de control, mientras que  $K$  y  $G$  son variables de estado. El planificador social, además, toma el nivel inicial de ambos tipos de capital dado.

El Hamiltoniano en valor corriente es:

$$H = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda [(1-\tau) Y - c - \delta K] + \mu (\tau Y - \delta G) \quad [7]$$

Donde  $\lambda$  y  $\mu$  representan los precios sombra de K y G, respectivamente. Las condiciones de primer orden son las habituales (PmaK y PmaG denotan los productos marginales de los capitales privado y público, respectivamente):

$$H_c = 0 \quad c^{-\sigma} = \lambda \quad [8]$$

$$H_\tau = 0 \quad \lambda = \mu \quad [9]$$

$$\rho\lambda - H_K = \dot{\lambda} \quad \dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda(1-\tau) \text{ PmaK} + \lambda\delta - \mu\tau \text{ PmaK} \quad [10]$$

$$\rho\lambda - H_G = \dot{\mu} \quad \dot{\mu} = \rho\lambda - \mu\tau \text{ PmaG} + \delta\mu - \lambda(1-\tau) \text{ PmaG} \quad [11]$$

y las condiciones de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t K_t = 0 \quad [12]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t G_t = 0 \quad [13]$$

Las ecuaciones 8-11, juntamente con las condiciones de transversalidad (12) y (13) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, con condiciones de contorno. El sistema puede resolverse sólo por métodos numéricos, pero sí puede ya caracterizarse la tasa de crecimiento de la economía en el estado estacionario. Tomando logaritmos y diferenciando con respecto al tiempo en 8-11 se obtiene

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma} \left\{ A \left[ b^\psi + (1-b)^\psi \left( \frac{1-b}{b} \right)^{\frac{\psi}{1-\psi}} \right]^{\frac{1-\psi}{\psi}} b^\psi - \rho - \delta \right\} \quad [14]$$

Como es habitual en este tipo de modelos, en el estado estacionario todas las variables relevantes  $-c, K, G, Y-$  crecen a la misma tasa,  $\gamma^*$ .

La interpretación es la usual: el consumo crece si la productividad marginal del capital, neta de depreciación, excede la tasa de preferencia temporal. Cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución, mayor será la respuesta de los agentes a la diferencia entre la tasa de retorno neta y la tasa de preferencia temporal.

Es conveniente resaltar, en este punto, que el crecimiento se genera en este modelo, de modo endógeno, debido a la homogeneidad de grado uno de la función de producción (ecuación 4) en ambos tipos de capital. El ahorro de los individuos da lugar directamente a inversión en capital privado, e indirectamente  $-vía$  impuestos y la condición del presupuesto equilibrado $-$  asimismo a inversión en capital público. De este modo K y G crecen al mismo ritmo, y también lo hace el output al ser la tecnología homogénea de grado uno en K y G. Obviamente este rasgo no es original del presente modelo, sino que está presenta en todos aquellos que presentan esta linealidad



de la función de producción en uno o más factores de producción (ya se ha hecho mención aquí a dos modelos de estas características que son bien conocidos, Barro (1990) y Rebelo (1991)).

De las ecuaciones 9, 10 y 11 puede calcularse la ratio del capital privado al público en el estado estacionario. En concreto,

$$\frac{K}{G} = \left( \frac{b}{1-b} \right)^{\frac{1}{1-\psi}} \quad [15]$$

Intuitivamente, el hecho de que el planificador pueda elegir el tipo impositivo óptimo ocasiona que en el estado las productividades marginales respectivas de ambos tipos de capital sean iguales.

#### b.2) *Equilibrio competitivo.*

Es evidente a partir de la simple inspección del modelo que en este contexto existe algo similar a una externalidad: cuando un individuo decide destinar una unidad adicional a la inversión, está ocasionando indirectamente un incremento del capital público —vía elevación de renta y de ingresos impositivos—; a su vez, el aumento en el stock de capital público hace más productivo al capital privado. Ahora bien, puesto que este efecto externo es pequeño, el individuo no lo tendrá en cuenta a la hora de tomar sus decisiones de inversión.

Romer (1983) ha demostrado explícitamente que incluso en economías con rendimientos crecientes debido a externalidades de este tipo pueden alcanzarse soluciones de equilibrio competitivo. Otros ejemplos bien conocidos de este caso pueden encontrarse en Romer (1986) y Lucas (1988). No se cuestiona, por tanto, la existencia de este tipo de solución en este modelo; ahora bien, la externalidad mencionada conlleva que la tasa de inversión —y por consiguiente de crecimiento— será menor en el equilibrio competitivo que en la solución del planificador.

Una primera expresión de la solución descentralizada puede obtenerse del modo siguiente: el individuo busca maximizar su función de utilidad (1), sujeto a la restricción dada por la expresión (5). No considera en cambio la ecuación (6), puesto que él no interviene directamente en la evolución dinámica del capital público. Esto supone que en este caso nos encontramos ante un problema de control óptimo con una variable de control,  $c$ , y una variable de estado,  $K$ . Con el fin de obtener una expresión de la tasa de crecimiento en función de los parámetros del modelo es necesario especificar algún supuesto adicional: por ejemplo que, en el equilibrio competitivo, los agentes siguen una regla de decisión óptima similar a la del planificador social, de manera que la ratio  $K/G$  es igual a la obtenida en la solución centra-

lizada<sup>5</sup>. Para obtener esta solución competitiva, por tanto, se construye el Hamiltoniano con las ecuaciones (1) y (5), se hallan las condiciones de primer orden con respecto a  $c$  y  $K$  y se toman logaritmos y se diferencia con respecto al tiempo, de modo análogo a como se hizo más arriba. Una vez que se ha llegado a la expresión de la tasa de crecimiento del consumo, se sustituye la ratio  $K/G$  por su valor según indica la ecuación (15). El resultado es el siguiente:

$$\frac{\dot{c}}{c} \cdot e.c. = \frac{1}{\sigma} \left\{ (1-\tau) A \left\{ \left[ b^\psi + (1-b)^\psi \left( \frac{1-b}{b} \right)^{\frac{\psi}{1-\psi}} \right]^{\frac{1-\psi}{\psi}} b^\psi \right\} - \rho - \delta \right\} \quad [16]$$

Puesto que  $(1-\sigma)$  es menor que 1, la tasa de crecimiento de equilibrio competitivo calculada de este modo es menor que la tasa alcanzada en la economía centralizada.

### 3. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE LA TRANSICIÓN

Con el fin de analizar más en detalle la dinámica de la transición se ha utilizado el método de eliminación de tiempos, diseñado por Mulligan y Sala i Martín (1991, 1993) y consistente en un algoritmo que resuelve numéricamente los problemas de optimización dinámica que se plantean típicamente al tratar con modelos de crecimiento donde existen condiciones de transversalidad. Este algoritmo es considerablemente más eficiente que el método tradicionalmente empleado para resolver este tipo de problemas, el «shooting». Básicamente el «shooting» procura averiguar el valor inicial que debe tomar la variable de control para un valor dado de la variable de estado; a continuación se comprueba si el sistema dinámico obtenido verifica las condiciones de contorno. En caso negativo se elige otro valor y se procede nuevamente. Este procedimiento por prueba y error conlleva que el «shooting» puede ser difícil de poner en práctica en determinados modelos, o requerir para su implementación un proceso largo y tedioso.

El método de eliminación de tiempos presenta algunas diferencias con el «shooting». En primer lugar, mediante la supresión de la referencia explícita a la variable tiempo, trabaja con «funciones de política» —aquellas funciones que especifican el valor inicial óptimo de la variable de control que debe escogerse, para cada valor posible de la variable de estado— en lugar de hacerlo con las trayectorias temporales de las variables. En segundo lugar, convierte las condiciones de contorno en condiciones iniciales

<sup>5</sup> Deseo expresamente agradecer esta sugerencia a Paul Romer.

procediendo «hacia atrás» en el tiempo. De este modo se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, mucho más fácil de resolver que otro caracterizado por condiciones de contorno. Una vez que se ha transformado el sistema, algunos programas informáticos son capaces de caracterizar la solución por medio de la simulación.

El modelo descrito en este trabajo, no obstante, presenta una dificultad adicional. Puesto que se trata de un modelo de crecimiento endógeno, en el estado estacionario la tasa de crecimiento de las variables relevantes es positiva. Es preferible transformar el modelo, mediante un cambio de variables, de tal modo que se sustituya por otro caracterizado por crecimiento cero en el estado estacionario.

Para implementar en este caso el método de eliminación de tiempos procedemos del modo siguiente:

1. Siguiendo a Mulligan y Sala i Martín (1993), definimos variables «cuasi de control» y «cuasi de estado» («control like» y «state like»). La variable cuasi de control se simboliza por  $a$ , y la variable cuasi de estado por  $z$ . Sus expresiones son las siguientes:

$$a = c/K \quad [17]$$

$$z = K/G \quad [18]$$

Puesto que tanto  $c$  como  $K$  y  $G$  crecen a la misma tasa en el estado estacionario, las tasas de crecimiento de  $a$  y  $z$  serán cero en el estado estacionario.

2. Redefinimos las expresiones de las tasas de crecimiento de  $c$ ,  $K$ , y  $G$  en función de  $a$  y  $z$ . Ahora bien, en la expresión de la tasa de crecimiento de  $c$  obtenida de las condiciones de primer orden (8) y (10) se encuentra el cociente  $v/\lambda$ . Es preciso, nuevamente, realizar un supuesto adicional sobre el comportamiento de esta ratio (el supuesto adicional que se hizo explícito en el apartado b.2 de la sección primera hacía referencia sólo al estado estacionario).

En particular, se ha asumido que durante la transición se verifica el análogo a la igualdad de las productividades marginales ponderadas de  $K$  y  $G$ , pero con respecto a los precios sombra en lugar de con relación a los costes de los factores (recuérdese que, en este tipo de modelos, los únicos precios explícitamente considerados son los precios sombra). De este modo

$$PMaK/PMaG = \lambda/v \quad [19]$$

En el apéndice 1 se ofrece una derivación de la tasa de crecimiento de  $c$  durante la transición al estado estacionario. Para obtener las tasas de crecimiento de  $K$  y  $G$  se han

dividido las expresiones (5) y (6) por  $K$  y  $G$ , respectivamente. De este modo, las expresiones finales de  $a$  y  $z$  son las siguientes

$$\dot{a} / a = \dot{c} / c - \dot{K} / K = (1/\sigma)[(1-\tau)PMaK(z) + \tau PMaG(z) - \rho - \delta] - (1-\tau)PMeK(z) + a + \delta \quad [20]$$

$$\dot{z} / z = \dot{K} / K - \dot{G} / G = (1-\tau)PMeK(z) - a - \tau PMeG(z) \quad [21]$$

donde

$$PMaK(z) = A \left[ b^{\frac{1-\psi}{\psi}} + (1-b)^{\frac{1-\psi}{\psi}} z^{-\frac{1-\psi}{\psi}} \right]^{\frac{1-\psi}{\psi}} b^{\frac{1-\psi}{\psi}}$$

$$PMaG(z) = A \left[ b^{\frac{1-\psi}{\psi}} z^{\frac{1-\psi}{\psi}} + (1-b)^{\frac{1-\psi}{\psi}} \right]^{\frac{1-\psi}{\psi}} (1-b)^{\frac{1-\psi}{\psi}}$$

$$PMeK(z) = A \left[ b^{\frac{1-\psi}{\psi}} + (1-b)^{\frac{1-\psi}{\psi}} z^{-\frac{1-\psi}{\psi}} \right]^{\frac{1}{\psi}}$$

$$PMeG(z) = A \left[ b^{\frac{1-\psi}{\psi}} z^{\frac{1-\psi}{\psi}} + (1-b)^{\frac{1-\psi}{\psi}} \right]^{\frac{1}{\psi}}$$

A partir de las ecuaciones 20 y 21, que describen un nuevo sistema dinámico, puede realizarse un análisis de estabilidad local. El diagrama de fases en  $a$ ,  $z$  y los loci  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{z} = 0$  muestran, mediante la simple inspección visual, que para el caso de este modelo las ecuaciones dan lugar a un nodo estable en el estado estacionario.

3. Obtenemos una aproximación numérica a la función de política  $a(z)$  usando las expresiones (20) y (21) y el hecho de que

$$a'(z) = \dot{a}/\dot{z}$$

De este modo se ha llegado a una ecuación diferencial, ya no en el tiempo, como anteriormente, sino en  $z$ . La ecuación es la siguiente:

$$a'(z) = \dot{a}/\dot{z} = (a/\sigma) \left[ (1-\tau)PMaK(z) + \tau PMaG(z) - \rho - \delta \right] - a \left[ (1-\tau)PMeK(z) + a^2 + \delta a/z \right] (1-\tau)PMeK(z) - za - \tau PMeG(z) \quad [22]$$

La expresión (22) es, precisamente, la pendiente de la función de política. Conocemos un punto de esta función, el estado estacionario, donde los valores de  $a^*$  y  $z^*$  pueden hallarse encontrando el punto de corte entre los loci  $\dot{a} = 0$  y  $\dot{z} = 0$ . Esta ecua-

ción diferencial (22) puede resolverse precisamente tomando como condición inicial los valores de  $a$  y  $z$  en el estado estacionario. Previamente será necesario parametrizar la ecuación.

4. Si se resuelve la ecuación diferencial (22) –por ejemplo utilizando el comando `ode23` del programa Matlab<sup>6</sup>, obtenemos un conjunto de pares  $(z, a)$  que forman parte de la función de política. Mediante el uso de la interpolación se puede ajustar un polinomio a la función de política hasta el estado estacionario, con lo que se puede conocer así una aproximación algebraica a la función de política  $a(z)$ .

5. Sustituyendo  $a$  en la expresión (21) por el polinomio ajustado en el paso anterior, nos encontramos ahora ante una nueva ecuación diferencial, esta vez de  $z$  en  $t$ . La ecuación puede resolverse si se añade una condición inicial, por ejemplo el último valor obtenido en la simulación del paso 4 (recuérdese que en ese punto se procedía «hacia atrás» en el tiempo, de ahí que el valor inicial de  $z$  venga dado por el último valor ofrecido por la simulación). Se dispone así de información sobre la relación entre  $a$ ,  $z$  y el tiempo que permiten, realizando las sustituciones a la inversa, conocer la trayectoria temporal de  $C/K$ ,  $K/G$  y las tasas de crecimiento de las variables más relevantes.

#### 4. COMENTARIOS A LAS SIMULACIONES REALIZADAS

##### a) SIMULACIONES PARA $\Psi = 0.75$

Los valores de los parámetros que se han empleado inicialmente, en conformidad con trabajos similares, son:  $A=0.3$ ,  $\delta=0.1$ ,  $\rho=0.1$ ,  $\sigma=3$ ,  $\Psi=0.75$ ,  $b=0.6$ ,  $\tau=0.3$ . Para estos parámetros los valores de  $z^*$  y  $a^*$ , obtenidos a partir de la intersección de los loci  $a=0$ ,  $z=0$ , son 1.117 y 0.1311, respectivamente<sup>7</sup>. El hecho de que el estado estaciona-

<sup>6</sup> Si el equilibrio es un punto de silla en lugar de un nodo estable, en este punto surge un problema técnico. En sentido estricto, la pendiente de la función de política en el estado estacionario es 0/0. Ahora bien, el programa Matlab es capaz de cubrir una pequeña distancia en la dirección de la derivada expresada en (22), hasta que conoce una extensión suficiente de la función de política. Si el estado estacionario presenta el rasgo de ser un punto de silla, es posible que el programa «encuentre» el brazo inestable antes que el brazo estable o función de política. Si esto ocurre, puede aplicarse la regla de L'Hopital y proporcionar al ordenador información adicional sobre el valor (positivo o negativo) de la pendiente en el estado estacionario, obligándole a «encontrar» el brazo estable. El signo de la pendiente de la función de política en el estado estacionario, finalmente, puede conocerse a través del análisis de los autovalores y autovectores del jacobiano de una aproximación lineal de Taylor, alrededor del estado estacionario.

<sup>7</sup> Las simulaciones se han llevado a cabo asumiendo que  $z_0 < z^*$ . Se obtendrían resultados análogos en el supuesto contrario.

rio presente un equilibrio de nodo estable en nuestro caso simplifica considerablemente las cosas, ya que cualquier brazo de la función de política que se encuentre será una trayectoria estable.

La resolución numérica –utilizando el comando `ode23` de Matlab– de la ecuación diferencial (22), con los valores de los parámetros y de  $a$  y  $z$  en el estado estacionario mencionados más arriba proporciona un conjunto ordenado de pares de valores de  $a$ ,  $z$ , que al representarse gráficamente muestran la forma de la función de política,  $a(z)$  (figura 1, panel 1).

Obsérvese la semejanza de la función de política obtenida con la que resulta del modelo de Ramsey (1928) para unos valores semejantes de los parámetros<sup>8</sup>.

El ajuste de un polinomio de orden 3 a los pares de valores obtenidos en la simulación permite disponer de una aproximación algebraica de  $a$  en  $z$ . La sustitución de este polinomio en la ecuación 21 proporciona una nueva ecuación diferencial de  $z$  en  $t$ , que a su vez da lugar a otro conjunto de pares de valores  $t$ ,  $z$ .

El segundo panel de la figura 1 muestra la trayectoria de  $z$  en el tiempo. Como indica el gráfico, la ratio  $K/G$  crece al principio más rápidamente –lo cual indica que el capital privado crece a una tasa muy superior a la del capital público– hasta hacerlo después más lentamente, a medida que el capital público va acercando su tasa de crecimiento a la del capital privado (debido al hecho de que la inversión pública es cada vez mayor, al crecer el output y los ingresos impositivos). Finalmente, en el estado estacionario, ambos stocks de capital crecen a la misma tasa por lo que  $K/G$  es horizontal. Las unidades de tiempo son puramente convencionales; puede pensarse en ellas como en años, lo cual indica que en aproximadamente menos de dos décadas se alcanza el estado estacionario. La trayectoria temporal de la variable «cuasi de control»,  $C/K$ , es similar (figura 1, panel 3) alcanzándose el estado estacionario también antes del término de la segunda década.

A continuación se ha representado la trayectoria temporal de la tasa de crecimiento del consumo (panel 4 de la figura 1). Se observa que el consumo comienza creciendo a tasas más elevadas pero cada vez menores, hasta que finalmente alcanza su valor en el estado estacionario, 0.0204<sup>9</sup>. El hecho de que la tasa de crecimiento del consumo sea decreciente en el tiempo corresponde a la idea de «convergencia condicional», y es un rasgo que típicamente presenta el modelo neoclásico de crecimiento pero que, como se ve con este ejemplo, puede compartir con otras especificaciones.

<sup>8</sup> Obsérvese que las variables de la función de política, en el caso del modelo de Ramsey, son simplemente  $c$  y  $k$ .

<sup>9</sup> La tasa de crecimiento del consumo obtenida para estos parámetros según la expresión (14) –solución del planificador social– es, como cabía esperar, mayor: el valor es 0,0274.

b) RESULTADOS CON  $\Psi = 0.6$ 

A continuación se ha procedido a un cambio en el parámetro  $\Psi$  con objeto de analizar la sensibilidad del modelo al mismo y comparar la dinámica en la transición en ambos casos considerados. Puede interpretarse este segundo supuesto como un caso en el que los stocks de capital privado y público ostentan una elasticidad de sustitución menos elevada.

Los valores de  $a$  y  $z$ , en el estado estacionario, con  $\Psi = 0.6$  son de 1.2374 y 0.1419, respectivamente. La tasa de crecimiento del estado estacionario es también mayor en este caso, e igual a 0.0602.

La función de política y la evolución temporal de la ratio  $K/G$  y la tasa de crecimiento del consumo presentan una forma semejante al caso anterior (figura 2) pero la simple inspección visual de los gráficos –y en particular del panel 3 de la figura 2– indican que la transición es más rápida en el supuesto  $\Psi = 0.6$ . Para confirmar esta idea, se ha calculado una aproximación numérica a la derivada de la tasa de crecimiento del consumo. La figura 3 muestra que la derivada de la tasa de crecimiento del consumo alcanza valores mayores en el caso de  $\Psi = 0.60$  durante todo el periodo considerado; esto significa que la dinámica de la transición con una elasticidad de sustitución menor –en ausencia de shocks exógenos– no sólo es más rápida, sino que también conlleva variaciones más pronunciadas de la tasa de crecimiento del consumo. Es interesante resaltar que este fenómeno –menor duración de la dinámica de la transición si la elasticidad de sustitución es más pequeña– no es exclusivo de las funciones de producción CES, puesto que se produce también en el modelo de Ramsey (cf. Barro y Sala i Martín, 1995, p. 85).

En cualquier caso, también se observa que la transición es mucho más rápida en este caso que en el supuesto del modelo de Ramsey. Cabe atribuir este resultado al hecho de que, en este modelo, son dos los «motores del crecimiento» –los stocks de capital privado y público– mientras que en el modelo neoclásico sin progreso técnico tan sólo la acumulación de capital privado promueve el crecimiento, hasta que eventualmente éste cesa en virtud de los rendimientos decrecientes de la función de producción.

El método de eliminación de tiempos ha ofrecido así alguna información sobre la dinámica de la transición del modelo. Se observa que la función de política aparece como similar a la del modelo de Ramsey, y las trayectorias temporales de las variables «cuasi de control» y «cuasi de estado» son también semejantes a las que aparecen en el modelo señalado. La transición es, asimismo, más lenta y menos brusca si la elasticidad de sustitución entre ambos tipos de inputs es mayor. De esta forma podemos concluir que la función de producción utilizada, cóncava en cada input, comparte con el modelo de crecimiento neoclásico varias predicciones, y entre ellas que las tasas de

crecimiento de la variable consumo será monótonamente decreciente durante la transición; sin embargo, a diferencia del modelo neoclásico –y debido, en último extremo, a la homogeneidad de grado uno de la función de producción en ambos inputs reproducibles– la tasa de crecimiento no se aproximará asintóticamente a cero sino a una constante positiva.

## 5. CONCLUSIÓN

El presente trabajo se ha propuesto analizar la conexión entre capital público y crecimiento económico. Primeramente se presenta un modelo teórico alternativo al tradicional de Barro (1990), cuya principal diferencia respecto a este es que la tecnología se basa en una función de producción CES; la implicación de este hecho es que el nuevo modelo presenta dinámica de la transición hasta el estado estacionario. Seguidamente se obtiene la tasa de crecimiento del estado estacionario tanto para la solución del planificador social como para el equilibrio competitivo, y el empleo del método de eliminación de tiempos permite conocer algunos rasgos de la dinámica de la transición. Esta presenta algunas analogías con la experimentada por modelo de Ramsey. En concreto, la tasa de crecimiento del consumo es cada vez menor conforme la economía se aproxima al estado estacionario, lo cual concuerda con la idea de convergencia condicional.

Se destacan otros rasgos interesantes de la dinámica de la transición para distintos valores de la elasticidad de sustitución entre los inputs: si ésta es mayor, la transición es más lenta pero también menos traumática, porque la variabilidad de las tasas de crecimiento a lo largo de la transición decrece.

La principal diferencia de la dinámica de la transición en este modelo con el caso de funciones de producción del tipo Ramsey es que, en el segundo caso, la transición al estado estacionario es mucho más lenta. Puede pensarse así en las funciones de producción del tipo CES como en un caso intermedio entre los modelos neoclásicos (transición lenta al estado estacionario) y los del tipo «AK» (transición inmediata e instantánea al estado estacionario).



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGHION, P. y HOWITT, P., 1992, «A Model of Growth through Creative Destruction», *Econometrica* 60, 323-351.
- ARROW, K.J., CHENERY, H.B., MINHAS, B.S. y SOLOW, R., 1961, «Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency», *Review of Economics and Statistics* 43, 225-250.
- BANCO MUNDIAL, 1994, «World Development Report» (Washington D.C.).
- BARRO, R.  
1990, «Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth», *Journal of Political Economy* 98 part 2, S103-S125.  
1991, «Economic Growth in a Cross Section of Countries», *Quarterly Journal of Economics* 106, 407-443.
- BARRO, R. y LEE, J.W., 1993, «International Comparisons of Educational Attainment», *Journal of Monetary Economics* 32, 363-394.
- BARRO, R. y SALA I MARTÍN, X.  
1992, «Public Finance and Growth», *Review of Economic Studies* 59, 645-662.  
1995, «Economic Growth», McGraw Hill.
- CASHIN, P., 1995, «Government Spending, Taxes and Economic Growth», *IMF Staff Papers*, 42(2).
- CLARIDA, R., 1993, «International Capital Mobility, Public Investment and Economic growth», *NBER Working Paper* n. 4506.
- EASTERLY, W., 1993, «How Much Do Distortions Affect Growth?», *Journal of Monetary Economics* 32(2), 187-212.
- EASTERLY, W. y REBELO, S., 1993, «Fiscal Policy and Economic Growth», *Journal of Monetary Economics* 32, 417-458.
- EDWARDS, S.  
1992, «Trade Orientation, Distortions and Growth», *Journal of Development Economics* 39, 31-57.  
1993, «Trade and Growth in LDC», *Journal of Economic Literature* 31, 1358-93.
- FISCHER, S., 1993, «Macroeconomic Factors and Growth», *Journal of Monetary Economics* 32, 485-511.
- FUTAGAMI, K. y MINO, K., 1995, «Public Capital and Patterns of growth in the presence of Threshold Externalities», *Journal of Economics* 61(2).
- GLOMM, G. y RAVIDUMAR, B., 1994, «Gasto público productivo y crecimiento de largo plazo», *Cuadernos Económicos de ICE*, n. 58.
- GRAMLICH, E., 1994, «Infrastructures», *Journal of Economic Literature* 32, 1176-1996.

- GROSSMAN, G. y HELPMAN, E., 1991, «Quality Ladders in the Theory of Growth», *Review of Economic Studies* 58(1), 43-61.
- INADA, K., 1964, «Some Structural Characteristics of Turnpike Theorems», *Review of Economic Studies* 31, 43-58.
- LEVINE, R. y RENELT, D., 1992, «A Sensitivity Analysis of Cross Country Growth Regressions», *American Economic Review* 82, 942-963.
- LUCAS, R., 1988, «On the Mechanics of Economic Development», *Journal of Monetary Economics* 22, 3-42.
- MAS, M., MAUDOS, J., PÉREZ, F., y URIEL, E., 1993, «Competitividad, productividad industrial y dotación de capital público», *Papeles de Economía Española* 56, 144-160.
- MULLIGAN, C.B. y SALA I MARTÍN, X.,  
1991, «A Note on the Time-Elimination Method for Solving Recursive Economic Models», *NBER Technical Working Paper* n. 116, Cambridge, Mas.  
1993, «Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth», *Quarterly Journal of Economics* 108, 737-773.
- MURPHY, K., SHLEIFER, A. y VISHNY, R.W., 1991, «The Allocation of Talent: Implications for Growth», *Quarterly Journal of Economics* 106, 503-530.
- NORDHAUS, W.D., 1969, «An Economic Theory of Technological Change», *American Economic Review* 59(2), 18-28.
- RAMSEY, F., 1928, «A Mathematical Theory of Saving», *Economic Journal* 38, 543-559.
- RAYMOND, J.L., 1989, «Productividad de los factores y expansión del sector público en España», *Papeles de Economía Española* 41, 159-171.
- REBELO, S., 1991, «Long Run Policy Analysis and Long Run Growth», *Journal of Political Economy* 99, 500-521.
- ROMER, P.  
1983 «Dynamic Competitive Equilibria with Externalities, Increasing Returns and Unbounded Growth», Tesis Doctoral, Univ. Chicago.  
1986, «Increasing Returns and Long Run Growth», *Journal of Political Economy* 94, 1002-1037.
- SARGENT, T. y WALLACE, N., 1981, «Some Unpleasant Monetarist Arithmetic» en T. Sargent «*Rational Expectations and Inflation*», Harper & Row, 1986.
- SHELL, K., 1966, «Toward a Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation», *American Economic Review* 55(2), p. 62-68.
- SOLOW, R., 1956, «A Contribution to the Theory of Economic Growth», *Quarterly Journal of Economics* 70, 65-94.

- SUMMERS, R. y HESTON, A., 1991, «The PennWorld Table (Mark 5): an Expanded Set of International Comparisons», 1950-88, *Quarterly Journal of Economics* 106, 327-368.
- YOUNG, A., 1993, «Substitution and Complementarity in Endogenous Innovation», *Quarterly Journal of Economics* 108(3), 775-807.

## APÉNDICE I

Obtención de la tasa de crecimiento del consumo durante la transición.

La condición de primer orden especificada en la ecuación n.º 10 es la siguiente:

$$\rho\lambda - H_K = \dot{\lambda} \quad \dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda(1-\tau)PMaK + \lambda\delta - \mu\tau PMaK \quad [10]$$

Dividiendo por  $\lambda$  y asumiendo, como se justifica en el texto, que  $v/\lambda = PMaG/PMaK$ ,

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - (1-\tau)PMaK - \tau PMaG + \delta \quad [10']$$

A continuación se procede en la forma habitual. Se toman logaritmos en (8), se diferencia con respecto al tiempo y se sustituye  $\lambda/\lambda$  por (10') con lo que la expresión final es:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma} \left[ (1-\tau)PMaK + \tau PMaG - \rho - \delta \right] \quad [10'']$$

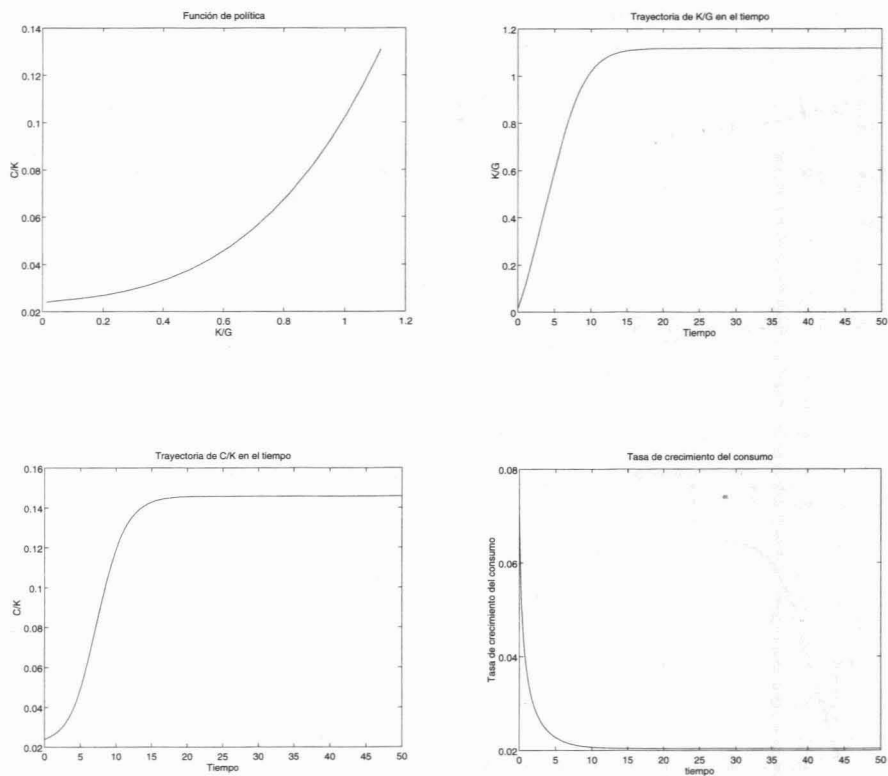


FIGURA 1

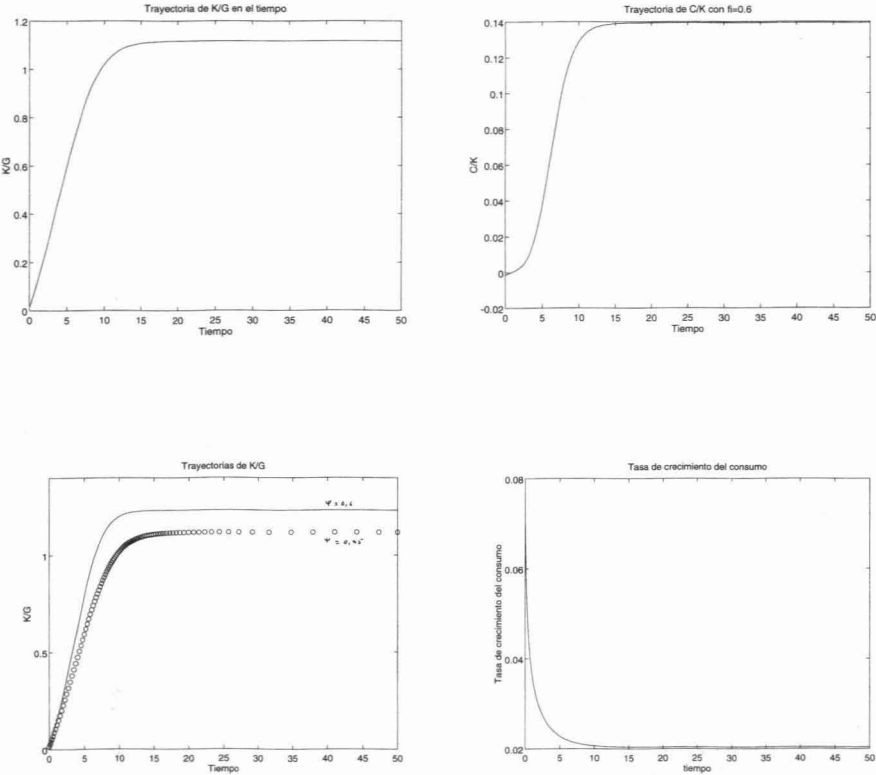
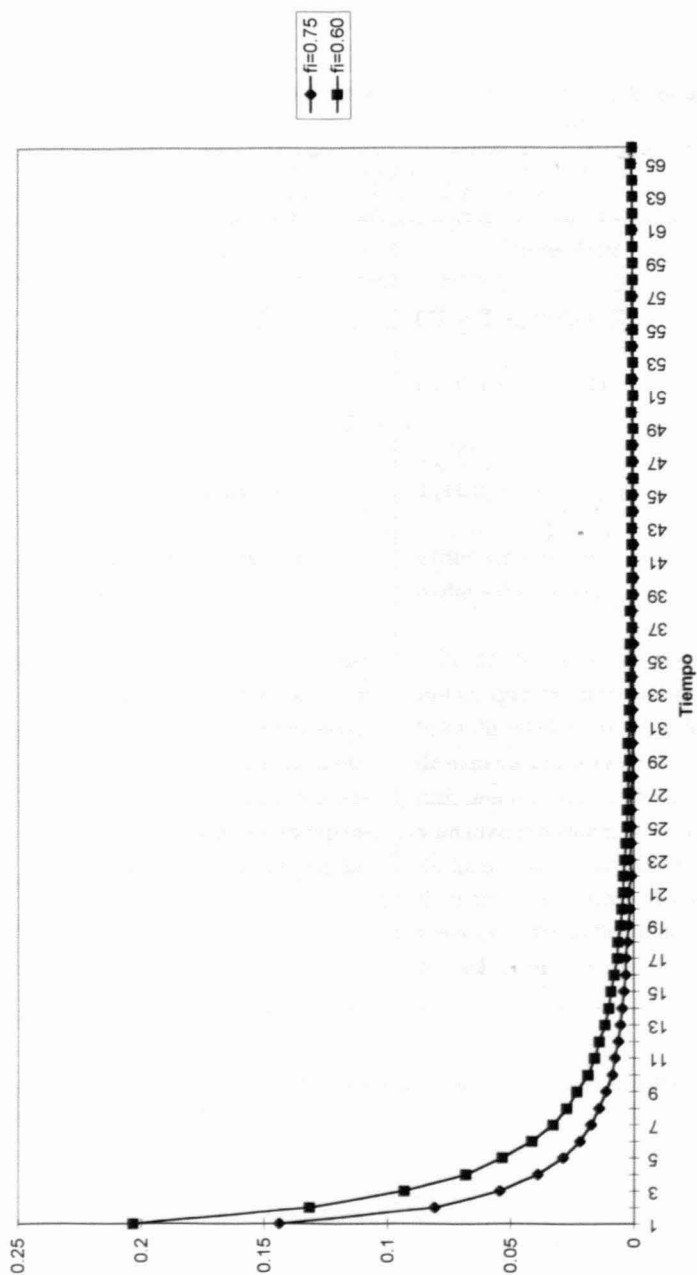


FIGURA 2

FIGURA 3

Derivada respecto al tiempo de la tasa de crecimiento del consumo



## Fe de erratas

Correspondiente al artículo de Eduardo MARTÍNEZ BUDRÍA, «La demanda de servicios portuarios» correspondiente al volumen 23, n° 65, enero-abril 1995.

pág.	línea	dice	debe decir
73	1ª	$CT = t + c_t(te + ts) + T$	$CT = T + c_t(te + ts) + Ti$
75	7ª	$te(Q) = 0 \text{ si } \leq Q_c$	$te(Q) = 0 \text{ si } Q \leq Q_c$
77	7ª	$T_A + Ce_A =$ $T_B + Ce_B + c_i(X_{B,P} X_{A,P})$	$T_A + Ce_A =$ $T_B + Ce_B + c_i(x_{B,P} - x_{A,P})$
78	3ª	$c_t(dte_A + dts_A) + c_i dx_{A,P} =$ $c_t(dte_B + dts_{Bp})$	$c_t(dte_A + dts_A) + c_i dx_{A,P} =$ $c_t(dte_B + dts_B) + c_i dx_{B,P}$
80	14 a 16	zado dos hipótesis: en primer lugar, que la mercancía se haya disribuida en el espacio de manera que la cantidad total de mercancía a través del sistema es independiente de los precios portuarios	zado dos hipótesis: en primer lugar, que la mercancía se haya distribuida en el espacio de manera <i>uniforme en tres zonas, una anexa a cada puerto y un área interior y, en segundo lugar</i> , que la cantidad total de mercancía a través del sistema es independiente de los precios portuarios

La cursiva de la última errata es solamente para resaltar la línea que se saltaron en la impresión pero no para incluirla.